

# M02 Drehpendel (erzwungene Schwingungen)

H. Bender, R.Boisch, Fachhochschule Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven,  
 Fachbereich Technik, Abteilung Photonik

Doc. 11. September 2002

## 1.1 Einführung

### 1.1.1 Ziel des Versuchs

In technischen Anwendungen werden Bauteile oftmals in Schwingungen versetzt. Man betrachte hier z.B einen Automotor der aus vielen Bauteilen besteht. Beim Fahren in bestimmten Drehzahlbereichen ist zu beobachten, dass viele Teile des Fahrzeugs in Resonanzschwingungen versetzt werden. In diesem Zustand werden die Bauteile zusätzlich mechanisch belastet und können im ungünstigen Fall zerstört werden. Dieser Versuch soll das grundlegende Verhalten eines Resonators zeigen und die notwendige Theorie vertiefen.

## 1.2 Theorie

### 1.2.1 Gedämpfte Schwingungen

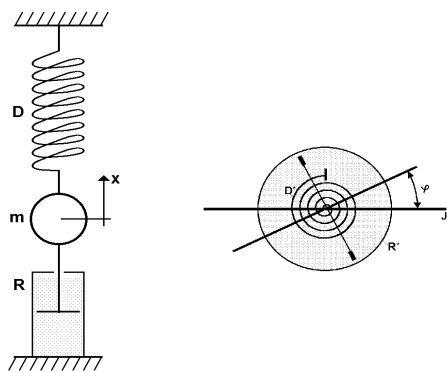


Abbildung 1.1: Federsysteme mit Dämpfer

Alle freien Schwingungen kommen irgendwann zur Ruhe bedingt durch Dämpfung bzw. Reibung. Häufig ist die Dämpfung eine geschwindigkeitsproportionale Reibung. Reibungskräfte wirken immer der momentanen Geschwindigkeit entgegen und wir erhalten die zusätzliche Kraft

$$M_D = -c^* \cdot \dot{\varphi} \quad (1.1)$$

$$F_R = -R \cdot \dot{x} \quad (1.2)$$

bzw. das zusätzliche Moment

$$M_R = -R^* \cdot \dot{\varphi} \quad (1.3)$$

für Drehschwingungen. Für die Momente eines gedämpft schwingenden Systems gilt

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -R^* \cdot \dot{\varphi} - D^* \cdot \varphi \quad (1.4)$$

mit der folgenden homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{R^*}{J} \cdot \dot{\varphi} + \frac{D^*}{J} \cdot \varphi = 0 \quad (1.5)$$

Aus praktischen Gründen wählt man die Abkürzungen  $\frac{R^*}{2 \cdot J} = \delta$  und  $\frac{D^*}{J} = \omega_0^2$ .  
 Damit erhält man die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2 \cdot \delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0 \quad (1.6)$$

Diese Differentialgleichung wird durch den Lösungsansatz  $\varphi \sim e^{\lambda t}$  (auch für ungedämpfte Schwingungen möglich) mit  $\lambda$  als zu bestimmendem Parameter berechnet. Differenzieren der o.g. Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &\sim \lambda \cdot e^{\lambda t} \\ \ddot{\varphi} &\sim \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Dies eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$e^{\lambda t} \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + \omega_0^2) = 0 \quad (1.7)$$

und wird gelöst durch

$$\lambda^2 + 2 \cdot \delta \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung}) \quad (1.8)$$

mit

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (1.9)$$

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind die zu bestimmenden Parameter. Unter Zuhilfenahme des Lösungsansatzes erhalten wir

$$\varphi = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (1.10)$$

$A$  und  $B$  werden wieder durch die Anfangsbedingungen bestimmt. In Abhängigkeit vom Ausdruck  $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  treten drei verschiedene Fälle auf, die (vereinfacht) vorgestellt werden.

- Kriechfall, der Wurzel Ausdruck ist  $> 0$  und mit

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 &= -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_{1,2} &< 0\end{aligned}$$

besteht die Lösung

$$\varphi = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (1.11)$$

aus 2 linear unabhängigen Anteilen (muß bei einer Differentialgleichung 2. Grades der Fall sein) und mit  $A$  und  $B \in \mathbb{R}$  können alle Anfangsbedingungen erfüllt werden. Beide Anteile sind mit der Zeit abklingende e-Funktionen, bei dieser hohen Dämpfung „kriecht“ das System - ohne zu schwingen - exponentiell gegen den Nullpunkt.

- Schwingfall, der Wurzel Ausdruck ist imaginär und mit

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (1.12)$$

$\omega_d$ : Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung erhält man

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d \quad (1.13)$$

mit der Lösung

$$\varphi = A \cdot e^{(-\delta + j \cdot \omega_d)t} + B \cdot e^{(-\delta - j \cdot \omega_d)t} \quad (1.14)$$

Vereinfacht nehmen wir  $A = B$  an und erhalten

$$\varphi = A \cdot e^{-\delta t} \cdot (e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}) \quad (1.15)$$

mit  $\cos \omega_d t = \frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2}$  folgt

$$\varphi = \hat{\varphi} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos \omega_d t \quad (1.16)$$

Dies ist eine gedämpfte cos-Schwingung mit der Umhüllenden  $e^{-\delta t}$  (abnehmende Amplitude). Die benachbarten „Amplituden“  $\varphi_n$  und  $\varphi_{n+1}$  verhalten sich mit

$$\cos \omega_d t_n = 1 \quad \text{und} \quad t_{n+1} - t_n = T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad (1.17)$$

wie

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \frac{e^{-\delta t_n}}{e^{-\delta t_{n+1}}} = e^{\delta T_d} \tag{1.18}$$

durch Logarithmierung erhält man

$$\ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \delta T_d \quad : \text{logarithmisches Dekrement} \tag{1.19}$$

Die gewählte Anfangsbedingung  $A = B$  entspricht der Startbedingung, daß eine Anfangsauslenkung und eine kleine negative Anfangsgeschwindigkeit vorhanden sind. Andere Anfangsbedingungen werden mit anderen  $A, B$  erfüllt mit der Lösung

$$\varphi = e^{-\delta t} \cdot (c_1 \cdot \cos \omega_d \cdot t + c_2 \cdot \sin \omega_d \cdot t) \tag{1.20}$$

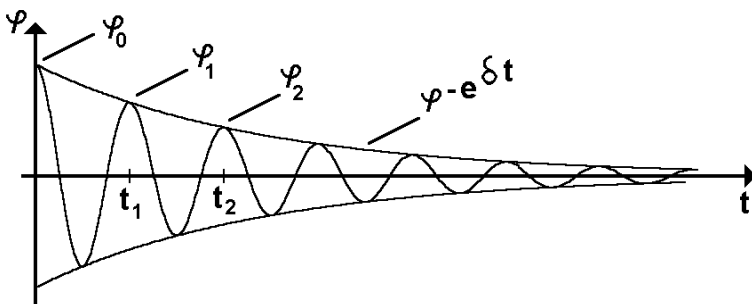


Abbildung 1.2: Gedämpfte Schwingung

- aperiodischer Grenzfall  
Der Wurzelausdruck ist Null und mit  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$  erhält man zunächst nur eine Lösung. Eine Differentialgleichung 2. Ordnung benötigt aber zwei Lösungen zur Einstellung der Anfangsbedingungen. Die Theorie der Differentialgleichungen liefert als vollständige Lösung

$$\varphi = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot t + B) \tag{1.21}$$

mit  $A$  und  $B$  können alle Anfangsbedingungen eingestellt werden. Im aperiodischen Grenzfall strebt ein schwingungsfähiges System am schnellsten gegen den Nullpunkt, dies ist z. B. für Meßgeräte wichtig.

### 1.2.2 Erzwungene Schwingungen

Dem gedämpften schwingungsfähigen System wird dauernd Schwingungsenergie in Form eines zusätzlich wirkenden harmonischen Erregermomentes  $M_E$  mit

$$M_E = \hat{M}_E \cdot e^{j\omega_E t} \tag{1.22}$$

zugeführt. Das System wird dann durch

$$J \cdot \ddot{\varphi} + R^* \cdot \dot{\varphi} + D^* \cdot \varphi = \hat{M}_E \cdot e^{j\omega_E t} \tag{1.23}$$

beschrieben. Mit

$$\hat{M}_E = \hat{\varphi}_E \cdot D^* \tag{1.24}$$

$\hat{\varphi}_E$  ist die Amplitude der statischen Auslenkung ( $\omega_E = 0$ ) unter der Wirkung des Erregermomentes, erhalten wir nach Division mit  $J$

$$\ddot{\varphi} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = \omega_0^2 \cdot \hat{\varphi}_E \cdot e^{j\omega_E t} \tag{1.25}$$

Anmerkung:

$e^{j\omega_E t}$  ist ein in der komplexen Zahlenebene mit der Kreisfrequenz  $\omega_E$  umlaufender Einheitszeiger, er beschreibt gleichzeitig die cos-Funktion (auf der reellen Achse) und die sin-Funktion (auf der imaginären Achse).

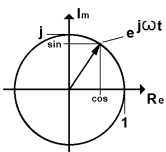


Abbildung 1.3: Feder-systeme mit Dämpfer

Eigenschaften des Systems und der Erregerschwingung abhängig.  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\omega_E)$  und  $\psi = \psi(\omega_E)$  können bestimmt werden, indem eine Schwingung

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}(\omega_E) \cdot e^{j\omega_E t} = \hat{\varphi}(\omega_E) \cdot e^{-j\psi(\omega_E)} \cdot e^{j\omega_E t} \quad (1.26)$$

mit  $\hat{\varphi} = |\hat{\varphi}|$ ,  $\psi$  als zu bestimmende Parameter, in die Differentialgleichung des Systems eingesetzt wird. Mit

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \hat{\varphi} j\omega_E \cdot e^{j\omega_E t} \\ \ddot{\varphi}(t) &= \hat{\varphi} \omega_E^2 \cdot e^{j\omega_E t} \end{aligned}$$

erhält man ( $\hat{\varphi} e^{j\omega_E t}$  kann gleich ausgeklammert werden)

$$\hat{\varphi} \cdot e^{j\omega_E t} \cdot (-\omega_E^2 + 2 \cdot j \cdot \omega_E \cdot \delta + \omega_0^2) = \omega_0^2 \cdot \hat{\varphi}_E \cdot e^{j\omega_E t} \quad (1.27)$$

Die komplexe Vergrößerungsfunktion  $\underline{V} = \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}_E} = \frac{\text{komplexe Amplitude des Systems}}{\text{Amplitude des Erregers}}$  erhält man zu

$V = |\underline{V}| = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_E^2 + 2 \cdot j \cdot \delta \cdot \omega_E}$ . Durch Betragsbildung erhält man:

$$\underline{V} = \frac{\omega_0^2}{((\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega_E^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.28)$$

mit folgendem Verlauf

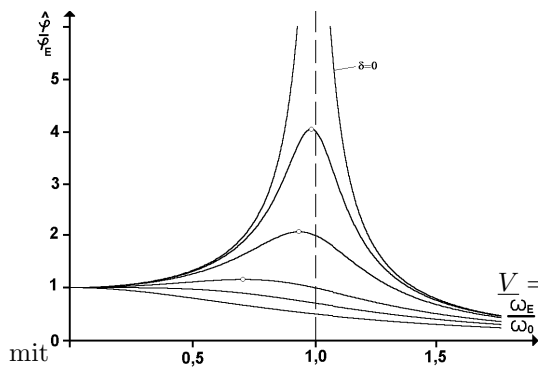


Abbildung 1.4: Resonanzkurven

und

Das dämpfungsabhängige Maximum, die Resonanz, liegt bei  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Mit dieser Frequenz würde das freie System schwingen. Mit abnehmender Dämpfung wird das Maximum höher. In der Resonanz wird zur freien Schwingung durch den Erreger dauernd Schwingungsenergie hinzugefügt, die bei der sich einstellenden Amplitude des „Resonators“ durch die Dämpfung in Wärme umgewandelt wird. Die Phase  $\psi$  erhält man durch Erweiterung mit dem konjugiert-komplexen Nenner über

$$\underline{V} = \omega_0^2 \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega_E^2 - 2 \cdot j \cdot \delta \cdot \omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega_E^2} \quad (1.29)$$

$$-\tan \psi = \frac{-2 \cdot \delta \cdot \omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \quad (1.30)$$

$$\psi = \arctan \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \quad (1.31)$$

mit folgendem Verlauf

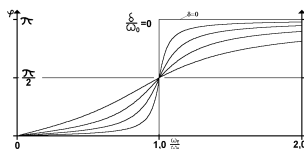
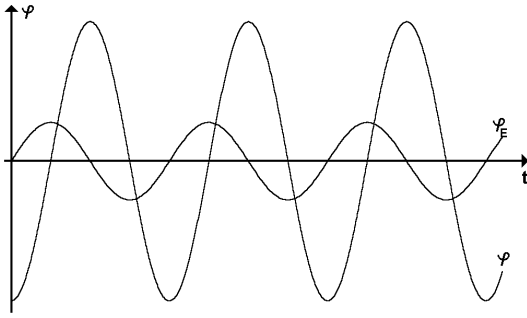


Abbildung 1.5: Phasenverlauf bei unterschiedlicher Dämpfung

Bei niedrigen Frequenzen sind Erreger und Resonator in Phase, bei  $\omega_E = \omega_0$  eilt der Erreger um  $\frac{\pi}{2}$  (um  $90^\circ$ ) vor und bei sehr hohen Frequenzen eilt der Erreger um  $\pi$  (um  $180^\circ$ ) vor. Eine Darstellung der um  $\frac{\pi}{2}$  verschobenen Schwingung von Erreger und Resonator bei  $\omega_E = \omega_0$  und mittlerer Dämpfung zeigt Abbildung 1.6

Abbildung 1.6: um  $\frac{\pi}{2}$  verschobene Schwingungsverläufe

## 1.3 Versuch

### 1.3.1 Eigenfrequenz des Drehpendels

Ermitteln Sie die Frequenz  $\omega_0$  des frei schwingenden Drehpendels, indem Sie die Schwingungsdauer  $T_0$  messen. Führen Sie diese Messung sechs mal durch.

### 1.3.2 Ermittlung der Dämpfungskonstante

Messen Sie die Dämpfungskonstante  $\beta$  indem Sie das Drehpendel maximal auslenken und die Amplitude nach jeder fünften Schwingung ablesen. Messen Sie, bis das Pendel fast ausgeschwungen ist. Führen Sie die Messung zwei mal durch. Tragen Sie die Messwerte der Amplitude über die Zeit auf. Bestimmen Sie für den Amplitudenwert  $e$  die Zeit und berechnen daraus die Dämpfungskonstante.

### 1.3.3 Frequenz und Dämpfung bei Benutzung der Wirbelstrombremse

Messen Sie  $\omega_0$  und  $\beta$  für die Dämpfungsströme  $I_d = 200\text{mA}$ ,  $I_d = 400\text{mA}$ ,  $I_d = 600\text{mA}$ ,  $I_d = 800\text{mA}$ ,  $I_d = 1000\text{mA}$ ,  $I_d = 1200\text{mA}$ ,  $I_d = 1400\text{mA}$ .

### 1.3.4 Messung von Resonanzkurven

Nehmen Sie zwei Resonanzkurven auf, indem Sie mit dem Motor das Pendel anregen. Fahren Sie hierbei die Frequenz des Erregers über die Resonanz des Pendels. Führen Sie die Messung bei den Dämpfungsströmen  $I_d = 300\text{mA}$  und  $I_d = 1\text{A}$  durch. Zur späteren Normierung messen Sie zusätzlich zwei Erregerfrequenzen, die weit entfernt von der Resonanz liegen (Messung von  $\phi_0$ ).

## 1.4 Auswertung

- Geben Sie die Eigenfrequenz  $\omega_0$  und die Dämpfungskonstante  $\beta_0$  an. Zeigen Sie, dass das System als frei schwingend betrachtet werden kann ( $(\beta_0/\omega_0)^2 \ll 1$ )
- Stellen Sie die Dämpfungskonstante  $\beta$  als Funktion des Dämpfungsstroms dar (Eichkurve der Wirbelstrombremse). Erzeugen Sie daraus die Kurve  $\omega^2$  als Funktion von  $\beta^2$  und vergleichen Sie diese mit dem theoretisch zu erwartenden Ergebnis  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ .
- Stellen Sie die Resonanzkurven (Auslenkung  $\phi/\phi_0$  als Funktion von  $\omega$ ) dar.  $\phi_0$  ist die zur Normierung gemessene Frequenz. Berechnen Sie die theoretischen Kurven für die beiden Dämpfungsströme und tragen Sie die Kurven in das Diagramm ein. Vergleichen Sie die theoretischen und die gemessenen Kurven.

## 1.5 Anhang/Bilder