

# M04 Massenträgheitsmoment

Author, Fachhochschule Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven,  
Fachbereich Technik, Abteilung Photonik

Doc. 19. September 2002

## 1.1 Einführung

### 1.1.1 Ziel des Versuchs

Bei der Drehbewegung von Körpern spielt das Massenträgheitsmoment eine wichtige Rolle. Beispiele für rotierende Körper sind die Unruh einer mechanischen Uhr, ohne die dieses Messinstrument nicht funktionieren würde, die Anker in den Elektromotoren, die Druckwalzen einer Druckmaschine, die in hohe Rotationsgeschwindigkeiten versetzt und auch wieder abgebremst werden müssen, oder die rotierenden Datenträgerscheiben in der Festplatte von Personal-Computern. Die, bei diesen Bewegungen, auftretenden Kräfte müssen berücksichtigt werden, da sonst z.B. Grenzen für die Haltbarkeit eingesetzter technischer Werkstoffe überschritten werden können, was u.U sogar zu lebensgefährlichen Situationen führen kann.

In diesem Versuch soll gezeigt werden, dass für den Einsatz einfacher technischer Körper das Massenträgheitsmoment bei der Drehbewegung berechnet und durch Versuche bestimmt werden kann.

## 1.2 Theorie

Wirkt auf einen geradlinig geführten, frei verschiebbaren Körper der Masse  $m$  die konstante Kraft  $\vec{F}$  in Richtung der Bahngeraden, so wirkt auf ihn die konstante die Beschleunigung  $\vec{a}$ , wodurch sich die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Körpers ändert. Die Masse  $m$  wirkt dabei als Widerstand gegen die Bewegungsänderung (Massenträgheit). Man merkt dieses sehr eindrucksvoll, wenn z.B. ein Wagen aus der Ruhe angeschoben werden soll. Newton hat diesen Zusammenhang beschrieben durch:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1.1)$$

Die Bewegungsgleichung für lineare Bewegungen lautet:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (1.2)$$

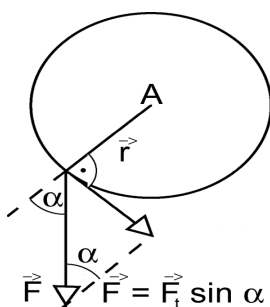


Abbildung 1.1: Drehbewegung

Entsprechend den geradlinigen Bewegungen von Körpern müssen auch die Drehbewegung von Körpern um eine feste Achse betrachtet werden. Der einfachste Drehkörper besteht aus einem Massepunkt, der sich in einem konstanten Abstand  $r$  um eine Achse bewegen kann. Will man ihn in Bewegung setzen, muss auf ihn die Kraft  $\vec{F}$  wirken, die eine Komponente ( $F_t$ ) besitzt, die nicht in Richtung des Radius  $\vec{r}$  liegt. Das vektorielle Produkt einer Kraftkomponente die senkrecht auf dem Radiusvektor steht und in Richtung der Bahntangente zeigt, nennt man Drehmoment  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Ein Drehmoment ändert die Drehgeschwindigkeit (Bahn/Winkelgeschwindigkeit) des Massepunktes, da es eine Winkelbeschleunigung an ihm erzeugt. Auch hier wirkt die Masse  $m$  wieder als Widerstand gegen die Änderung der Geschwindigkeit (Drehgeschwindigkeit). Durch Untersuchungen wird sich herausstellen, dass dieser Bewegungswiderstand nicht nur von der Masse  $m$ , sondern auch von deren Abstandsquadrat senkrecht zur Drehachse abhängt. Diese Größe

heißt Massenträgheitsmoment  $J_a$ . Es beträgt für den einfachsten Drehkörper  $J_a = m \cdot r^2$ . Die Bewegungsgleichung für die Drehbewegung lautet:

$$\sum \vec{M}_i = 0 \quad (1.3)$$

Ein technischer Körper besteht im Allgemeinen aus vielen Massepunkten  $m_i$  mit verschiedenen Abständen  $r_i$  zur Drehachse. Das Massenträgheitsmoment  $M$  des Körpers ergibt sich aus der Summe der Einzelmassenträgheitsmomente.

$$J_a = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \quad (1.4)$$

Liegen die Massepunkte unendlich (infinitesimal) dicht, geht die Summe über in das Integral:

$$J = \int_{m_i} r^2 dm \quad (1.5)$$

Dabei ist  $r$  der senkrechte Abstand eines Massenelements  $dm$  von der Drehachse.

Ist das Massenträgheitsmoment  $J_a$  um eine bestimmte Achse bekannt (z.B. die Achse durch den Schwerpunkt), wird nach dem Satz von Steiner das Massenträgheitsmoment um eine beliebige, parallel verschobene Achse im Abstand  $r$  zur ersten Achse bestimmt. Hierbei gilt:

$$J_b = J_a + m \cdot r^2 \quad (1.6)$$

Mittels Drehschwingungen können Massenträgheitsmomente bestimmt werden, wobei für die Schwingungsdauer  $T_0$  eines reibungsfreien Drehpendels gilt:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_b}{c^*}} \quad (1.7)$$

Wobei  $J_b$  das Massenträgheitsmoment bezüglich der Drehachse um die die Schwingung stattfindet und  $c^*$  die Winkelrichtgröße der Spiralfeder ist.

Die Gleichungen, die die Kinematik linearer Bewegungen beschreiben, kann man auf die Kinematik der Drehbewegungen übertragen, wenn folgende Analogien benutzt werden:

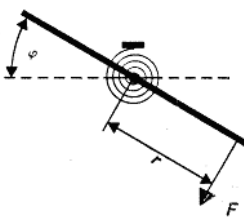
$$m \rightarrow J, s \rightarrow \varphi, \dot{s} \rightarrow \dot{\varphi}, \ddot{s} \rightarrow \ddot{\varphi}, F \rightarrow M$$

## 1.3 Versuch

### 1.3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße statisch

Wird das Drehpendel um den Winkel  $\varphi$  aus der Ruhelage herausgedreht, muß das Drehmoment

$$M = c^* \cdot \varphi \quad (1.8)$$



erzeugt werden.  $c^*$  bezeichnet hierbei die Winkelrichtgröße (Federkonstante der Drehfeder). Zur Messung wird an der Drillachse der Versuchsapparatur der dünne Stab befestigt. Mit der Federwaage wird die Tangentialkraft für zwei unterschiedliche Angriffspunkte  $r$  ( $r$ =Abstand von der Drillachse) für die vier Auslenkwinkel  $\varphi = -\Pi, -2\Pi, \Pi$  und  $2\Pi$  gemessen. Die hieraus errechneten Drehmomente  $M$  sollen über den Winkel  $\varphi$  aufgetragen werden.

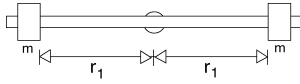
*Achtung, der maximale Verdrillungswinkel für die Apparatur ist  $4\Pi$ ! Die Feder nicht überdehnen!*

Abbildung 1.2: Schematischer Aufbau

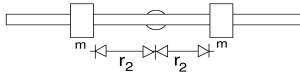
### 1.3.2 Bestimmung der Winkelrichtgröße dynamisch

Auf dem Stab werden die beiden gleichen verschiebbaren Zylinder der Masse  $m_z$  in symmetrischer Lage befestigt. Für zwei verschiedene Schwerpunktabstände  $r_1$  und  $r_2$  von der Drehachse sollen die zugehörigen Drehschwingungsdauern  $T_1$  und  $T_2$  gemessen werden. Die Messung ist sechs mal zu wiederholen.

Nach Gl 1.7 hängt die Schwingungsdauer vom gesamten Massenträgheitsmoment  $J_{ges}(=J_b)$  ab. Das gesamte Massenträgheitsmoment addiert sich aus den einzelnen Anteilen von Stab ( $J_{st}$ ), den beiden Hohlzylindern ( $2 \cdot J_z$ ) und der Drillachse ( $J_{dr}$ ). Durch Addition der Einzelträgheitsmomente für die Stange  $J_S$  und die beiden Zusatzmassen  $2mr^2$  berechnet sich das Massenträgheitsmoment für den entsprechenden Versuchsaufbau:



$$J_1 = J_S + 2mr_1^2 \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{c}} \quad (1.9)$$



$$J_2 = J_S + 2mr_2^2 \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{c}} \quad (1.10)$$

mit  $r_1 > r_2$  und  $T_1 > T_2$

Umstellen von Gl.(1.9) nach  $J_S$

$$J_S = J_1 - 2mr_1^2 \quad (1.11)$$

und Einsetzen in Gl.(1.10)

$$J_2 = J_1 - 2mr_1^2 + 2mr_2^2 \quad (1.12)$$

$$J_2 = J_1 - 2m(r_1^2 - r_2^2) \quad (1.13)$$

mit

$$\frac{T_1^2}{4\Pi^2} \cdot c = J_1 \quad (1.14)$$

$$\frac{T_2^2}{4\Pi^2} \cdot c = J_2 \quad (1.15)$$

ergibt sich:

$$\frac{T_2^2}{4\Pi^2} \cdot c = \frac{T_1^2}{4\Pi^2} \cdot c - 2m(r_1^2 - r_2^2) \quad (1.16)$$

$$\frac{T_2^2 - T_1^2}{4\Pi^2} \cdot c = -2m(r_1^2 - r_2^2) \quad (1.17)$$

$$c = 8\Pi^2 m \left( \frac{r_1^2 - r_2^2}{T_1^2 - T_2^2} \right) \quad (1.18)$$

### 1.3.3 Bestimmung der Massenträgheitsmomente unterschiedlicher Probekörper

Zu Verfügung stehen:

- Vollzylinder
- Hohlzylinder
- Kugel
- Scheibe (massiv)
- Scheibe (gelocht, Einspannung in der Scheibenmitte)

Gemessen wird, indem der Probekörper auf der Drillachse des Versuchsgerätes befestigt und der Körper in Schwingung versetzt wird. Hierbei wird die Zeit für eine hohe Anzahl Schwingungen gemessen. Jede Messung wird sechs mal wiederholt.

Vermessen Sie die Probekörper um die Massenträgheitsmomente über die theoretischen Formeln berechnen zu können.

### 1.3.4 Überprüfung des Steinerschen Satzes

Zur Überprüfung des Steinerschen Satzes wird die gelochte Scheibe verwendet. Von der Mitte des Scheibe nach Aussen sind Bohrungen angebracht, in denen die Scheibe eingespannt werden kann. Gemessen wird die Schwingzeit für die entsprechenden Einspannpunkte. Es sollen alle 5 Bohrungen von Mitte nach Aussen benutzt werden, jede Messung wird sechs mal wiederholt.

Vermessen Sie die Scheibe für die Berechnung der theoretischen Werte.

## 1.4 Auswertung

- Berechnen Sie aus den Messwerten in 1.3.1 die Winkelrichtgröße.
- Berechnen Sie aus den Messwerten in 1.3.2 die Winkelrichtgröße. Vergleichen Sie die Werte mit dem Ergebnis aus 1.3.1
- Berechnen Sie die Trägheitsmomente aus den Messungen von 1.3.3. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den jeweils theoretischen Ergebnissen für die entsprechenden Probekörper.
- Berechnen Sie die Massenträgheitsmomente anhand der Messung aus 1.3.4.
- Berechnen Sie die theoretischen Werte für die Einspannpunkte mit dem Steinerschen Satz und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen aus der Messung.
- Zusatzaufgabe (auf extra Seite): Zeigen Sie durch Integration, wie die Formeln für die Massenträgheitsmomente  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$  (Raumkoordinatensystem  $x,y,z$ ), bei denen die Drehachse durch den Schwerpunkt eines Vollzylinders mit Radius  $r$  und Länge  $l$  verläuft, hergeleitet werden.

## 1.5 Anhang/Bilder

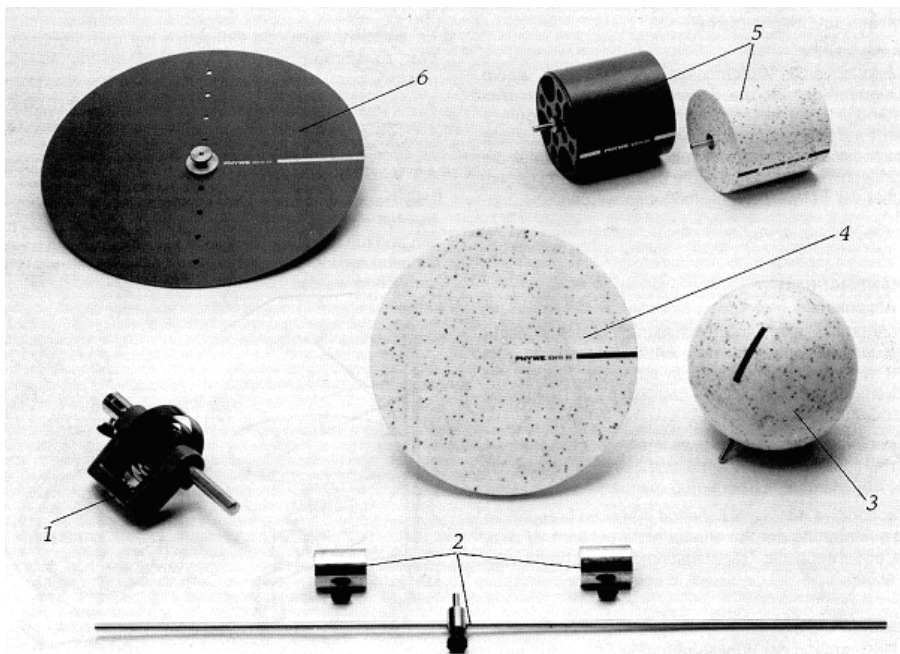


Abbildung 1.3: 1=Drillachse mit Spiralfeder, 2=Stab mit verschiebbaren Massen, 3=Kugel, 4=Scheibe, 5=Hohlzylinder und Vollzylinder, 6=Kreisscheibe mit Bohrungen