M07 Federkonstanten und Schwerpunktsbestimmung

H. Bender, Fachhochschule Oldenburg / Ostfriesland / Wilhelmshaven, Fachbereich Technik, Abteilung Photonik

Doc. 23. Januar 2002

1.1 Einführung

1.1.1 Ziel des Versuchs

Bestimmung der Federkonstanten von unterschiedlichen Spiralfedern anhand statischer und dynamischer Messungen, sowie die Schwerpunktsbestimmung einer Pleuelstange (physikalisches Pendel)

1.1.2 Aufgabenstellung

- Bestimmung der Federkonstanten von drei Federn mittels statischer Messung.
- Bestimmung der Federkonstanten von drei Federn mittels dynamischer Messung (Schwingversuch).
- Statische Bestimmung des Schwerpunktes einer LKW-Pleuelstange.
- Dynamische Bestimmung des Schwerpunktes einer LKW-Pleuelstange (Schwingversuch).

1.1.3 Hinweis

Für die Bestimmungen stehen verschiedene Komponenten zur Verfügung. Hierunter befindet sich eine Gabellichtschranke und ein Zähler. Den Zähler bitte nur dann zurücksetzen, wenn der Strahlengang der Lichtschranke frei ist.

1.2 Theorie

1.2.1 Schwingungen

Verschiebt man einen elastisch gebundenen Körper aus seiner Ruhelage, dann bewegt er sich nach dem Loslassen beschleunigt auf seine Ruhelage zu und läuft infolge seiner Trägheit über diese hinaus. Nach dem Durchgang durch die Ruhelage wirkt die rücktreibende Kraft verzögernd, da sie jetzt der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist und der Körper kommt schließlich kurzfristig zur Ruhe (Umkehrpunkt). Jetzt wiederholt sich der Vorgang in umgekehrter Richtung usw.
Diesen Vorgang nennt man Schwingung mit der Schwingungsdauer (Periodendauer) T, die verstreicht, bis sich ein Bewegungszustand (Ort, Betrag und Richtung der Geschwindigkeit) wieder einstellt. Die zugehörige Frequenz f und die Kreisfrequenz ω erhält man über

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.1}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T} \tag{1.2}$$

Eine wichtige Klasse von Schwingungen sind harmonische Schwingungen, bei denen die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist, d. h. linear von der Auslenkung abhängt.

1.2.2 Freie ungedämpfte Schwingungen

Als frei bezeichnet man Schwingungen, wenn dem Schwingungssystem einmal - am Beginn des Vorgangs - Energie zugeführt wird und dann nicht mehr. Um den Einfluss der Schwerkraft zu eliminieren, wird die skizzierte Versuchseinrichtung mit reibungsfreier Unterlage gewählt. Die Feder für sich betrachtet benötigt für eine Auslenkung um die Strecke x die Kraft $F = D \cdot x$, über Aktio = Reaktio wirkt die Feder mit

$$F = -D \cdot x \tag{1.3}$$

entgegen. Diese Kraft F greift an der Masse m an. Die Trägheitskraft F_m der Masse m wirkt der angreifenen Kraft entgegen und ist definiert durch:

$$F_m = m \cdot a \tag{1.4}$$

a: Beschleunigung mit $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

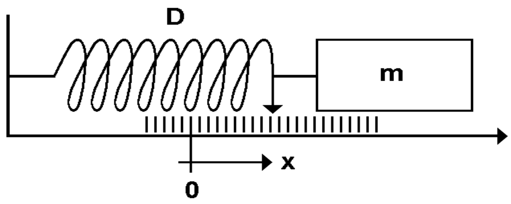

Abbildung 1.1: Masse–Feder–System

Wenn weiter keine Kräfte wirken (Reibung vernachlässigbar, äußere Kräfte sind nur zu Beginn des Vorganges vorhanden), gilt mit $F = F_m$

$$\begin{aligned} m \cdot a &= -D \cdot x \\ m \cdot a + D \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

dies ist eine homogene Differentialgleichung 2. Grades. Division durch m liefert

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0 \qquad , x = x(t) \tag{1.5}$$

Für diese Differentialgleichungen existieren 2 Lösungsansätze

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sin\omega_0 \cdot t & x_2(t) &= \cos\omega_0 \cdot t \\ \dot{x}_1(t) &= \omega_0 \cdot \cos\omega_0 \cdot t & \dot{x}_2(t) &= -\omega_0 \cdot \sin\omega_0 \cdot t \\ \ddot{x}_1(t) &= -\omega_0^2 \cdot \sin\omega_0 \cdot t & \ddot{x}_2(t) &= -\omega_0^2 \cdot \cos\omega_0 \cdot t \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot x \tag{1.6}$$

dies eingesetzt in die Differentialgleichung liefert

$$\sin\omega_0 \cdot t \cdot (-\omega_0^2 + \frac{D}{m}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \cos\omega_0 \cdot t \cdot (-\omega_0^2 + \frac{D}{m}) = 0 \tag{1.7}$$

Beide Lösungsansätze haben die „nichttriviale“ Lösung

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{1.8}$$

d. h. ein solches System schwingt nach der Gleichung

$$x(t) = A \cdot \sin\omega_0 \cdot t + B \cdot \cos\omega_0 \cdot t \tag{1.9}$$

als Linearkombination der beiden Lösungsansätze. Diese Lösung beschreibt dann eine harmonische Schwingung, wenn als Voraussetzung ein lineares Kraftgesetz mit $F = -D \cdot x$ gilt. Die Konstanten A und B sind abhängig von den Anfangsbedingungen der Schwingung. Wird eine Anfangsauslenkung $\hat{x}$ vorgegeben und zur Zeit $t = 0$ losgelassen, so gilt

$$x = \hat{x} \cdot \cos\omega_0 \cdot t = A \cdot \sin\omega_0 \cdot t + B \cdot \cos\omega_0 \cdot t \quad \Longrightarrow \quad A = 0, B = \hat{x} \tag{1.10}$$

Wird zur Zeit $t = 0$ eine Anfangsgeschwindigkeit $\hat{v}$ (z. B. durch Impulsübertragung) vorgegeben, so gilt mit

$$x = \frac{\hat{v}}{\omega_0} \cdot \sin\omega_0 \cdot t = A \cdot \sin\omega_0 \cdot t + B \cdot \cos\omega_0 \cdot t \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{\hat{v}}{\omega_0}, B = 0 \tag{1.11}$$

Für die Kräfte gilt

Feder : $F = -D \cdot x \quad \Longrightarrow \quad \hat{F} = D \cdot \hat{x}$: Amplitude der Federkraft

Masse: $F_m = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot \omega_0^2 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad \hat{F} = m \cdot \omega_0^2 \cdot \hat{x}$: Amplitude der Träheitskraft

Die Amplitude der Federkraft ist frequenzunabhängig, während die Amplitude der Trägheitskraft $\sim \omega_0^2$ ist. Setzen wir (wie bei den erzwungenen Schwingungen) eine variable Frequenz ω voraus, so gilt für die Amplituden der Kräfte nebenstehendes Bild. Nur bei $\omega = \omega_0$ ist das Kräftegleichgewicht gegeben, deshalb schwingt das freie System mit genau dieser Kreisfrequenz.

1.2.3 Das physikalische Pendel

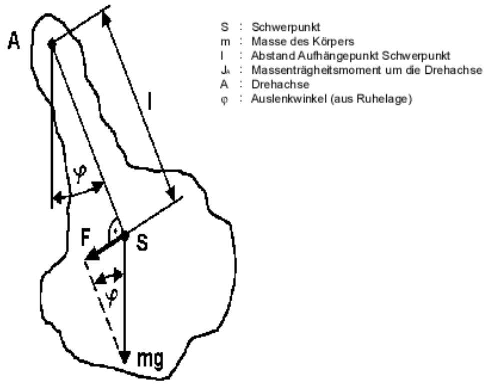

Abbildung 1.3: Physikalisches Pendel

Ein Körper wird oberhalb seines Schwerpunktes, wie in Abbildung 1.3 drehbar aufgehängt.
Ausgelenkt aus der Ruhelage gelten die folgenden Kräfte und Momente

$F = -m \cdot g \cdot \sin\varphi$: rücktreibende Kraft
$M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi$: rücktreibendes Moment
$M = -m \cdot g \cdot l \cdot \varphi$: rücktreibendes Moment für $\sin\varphi \approx \varphi$

mit $D^* = m \cdot g \cdot l$ und $J = J_A$ gilt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{J_A}} \tag{1.12}$$

Bei dieser Kreisfrequenz ω_0 sind, wie bei allen freien Schwingungen, rückstellendes Moment und Wirkung der Massenträgheit im Gleichgewicht. Außerdem gilt der Satz von Steiner mit

$$J_A = J_S + m \cdot l^2 \tag{1.13}$$

J_S Massenträgheit um eine parallelverschobene Achse durch den Schwerpunkt.

1.3 Versuch

1.3.1 Statische Bestimmung der Federkonstanten

Befestigen Sie die jeweils zu vermessende Feder an der Stativhalterung und justieren den Versuchsaufbau so, dass die minimale und die maximale Federverlängerung im Meßbereich des Meßgerätes liegt. Messen Sie die Federverlängerung für fünf unterschiedliche Massen, welche an die Feder gehängt werden. Hierbei können auch die Einzelmassen zum gewünschten Gewicht kombiniert werden. Führen Sie die Messung für jede Feder mehrfach durch.

1.3.2 Dynamische Bestimmung der Federkonstanten

Zur dynamischen Bestimmung der Federkonstanten wird der Zähler und die Gabellichtschranke benötigt. Justieren Sie den Versuchsaufbau so, dass das jeweilige Gewichtsstück im Ruhezustand der Feder den Lichtstrahl der Lichtschranke noch nicht unterbricht, kleine Schwingungsamplituden die Lichtschranke ansprechen lassen. Das Ansprechen der Lichtschranke wird durch das Aufleuchten der roten Leuchtdiode an der Gabellichtschranke angezeigt. Messen Sie jetzt die Zeit für 100 Schwingungen und führen diese Messung für jede Feder mehrmals durch. Für die korrekte Auswertung ist im Anschluss an die Messung das Gewicht der Feder zu bestimmen.

1.3.3 Statische Bestimmung des Schwerpunktes

Hängen Sie die Pleuelstange zunächst mit dem kleinen Pleuelauge in das verstellbare Stativ ein und unterstützen Sie das freie Pleuelauge mit der Waage. Justieren Sie jetzt die Pleuelstange „einigermaßen“ waagerecht. Entfernen Sie das freie Pleuelauge von der Waage und setzen Sie die Waage auf Null (Tara). Danach legen Sie die Pleuelstange wieder auf. Das von der Waage angezeigte Gewicht ist ein Maß für die unterstützende Kraft. Führen Sie diesen Versuch mehrfach durch und mittel Sie die Werte. Danach hängen Sie die Pleuelstange im großen Pleuelauge auf und führen den Versuch wie beschrieben mit dem kleinen Pleuelauge nochmals mehrfach durch.

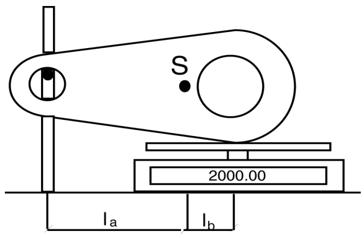

Abbildung 1.4: Statische Anordnung

1.3.4 Dynamische Bestimmung des Schwerpunktes

Hängen Sie die Pleuelstange im kleinen Pleuelauge in das Stativ mit dem Schneidenlager ein. Das Schneidenlager hat bei diesem Versuch die Aufgabe, die Reibung bei der Schwingung möglichst klein zu halten. Benutzen Sie für die nachfolgenden Messungen wieder Lichtschranke und Zähler. Justieren Sie hierzu die Lichtschranke so, dass die Pleuelstange in die Lichtschranke hineinschwingt. Messen Sie die Zeit für 100 Schwingungen der Pleuelstange und führen Sie diese Messung mehrfach durch. Danach hängen Sie die Pleuelstange im großen Pleuelauge auf und führen die Messung wie vorher beschrieben durch.

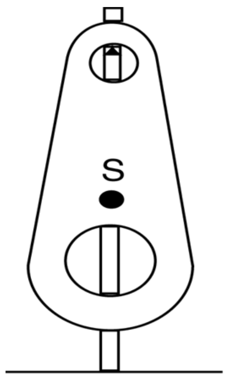

Abbildung 1.5: Dynamische Anordnung

1.3.5 Anmerkung

Für die Berechnung der Schwerpunktes zu 1.3.4 gilt:

$$l_a = \frac{T_B^2 - l_{ges} \cdot \frac{4\pi^2}{g}}{T_A^2 + T_B^2 - 2 \cdot l_{ges} \cdot \frac{4\pi^2}{g}} \cdot l_{ges} \tag{1.14}$$

1.4 Auswertung

1. Stellen Sie die Meßeregbnisse aus 1.3.1 in Form von Δs als Funktion von F_G graphisch dar. Bestimmen Sie aus der Steigung der Geraden die Federkonstanten.
2. Tragen Sie die Meßergebnisse aus 1.3.2 in der Form T^2 als Funktion von m_{ges} in ein Diagramm ein. Bestimmen Sie m_{eff} aus dem Schnittpunkt der Geraden mit der Abzissenachse und die Federkonstanten aus den Steigungen der Geraden.

3. Vergleichen Sie die Ergebnisse aus der statischen und der dynamischen Messung.
4. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes der Pleuelstange aus der Messung 1.3.3. Geben Sie die Längen l_a und l_b in Bezug auf die Mittelachse der Pleuelaugen an.
5. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes der Pleuelstange aus der Messung 1.3.4. Geben Sie die Längen l_a und l_b in Bezug auf die Mittelachse der Pleuelaugen an.
6. Vergleichen Sie die Ergebnisse der statischen und dynamischen Messung.
7. Schätzen Sie ab, welche Fehler in der einzelnen Versuchen das Ergebnis verfälschen. Geben Sie an, welche Messung das bessere Ergebnis liefert.