## Aufgabe 1

Zwischen den Zahlen 1 und 256 sollen drei Zahlen so eingeschoben werden, dass eine geometrische Folge entsteht. Welche Zahlen sind es?

**Lösung:**

$q = \sqrt[4]{256} = 4 \qquad\qquad 1;\ 4;\ 16;\ 64;\ 256;\ ...$

## Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{3n^4+2}{(n^2+1)(n^2-1)}\right)$ b) $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{n^3}{n^2-1}\right)$ c) $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^5$

**Lösung:**

a) $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{3n^4+2}{(n^2+1)(n^2-1)}\right) = \lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{3n^4+2}{n^4-1}\right) = \lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{3\frac{n^4}{n^4}+\frac{2}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4}-\frac{1}{n^4}}\right) = \lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{3+0}{1-0}\right) = 3$

b) $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{n^3}{n^2-1}\right) = \lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{1(n-1)-n^3}{n^2-1}\right) = \lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{\frac{n}{n^3}-\frac{1}{n^3}-\frac{n^3}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}-\frac{1}{n^3}}\right) = \lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{0-0-1}{0-0}\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^5 = \lim\limits_{n\mapsto\infty}\left(\frac{2\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)^5 = \left(\frac{2}{1+0}\right)^5 = 2^5 = 32$

## Aufgabe 3

Ermitteln Sie den Wert der Reihe

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(-5)^{n+1}}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1^{2n}}{(-3)^{n+1}}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(-2)^{3n}}$

**Lösung:**

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(-5)^{n+1}} = -\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(-5)^n} = -\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(-5)^n} = -\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n = -\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1^{2n}}{(-3)^{n+1}} = -\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{(-3)^1} = -\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(-2)^{3n}} = 3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(-8)^n} = 3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{8}\right)^n = 3\frac{1}{1+\frac{3}{8}} = \frac{24}{11}$

## Aufgabe 4

Berechnen Sie für welche Werte von a die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a+1)^k}{k\cdot 4^k}$ konvergiert.

**Lösung:**

$$\lim_{k\mapsto\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1 \qquad a_k=\frac{(a+1)^k}{k\cdot 4^k} \qquad a_{k+1}=\frac{(a+1)^{k+1}}{(k+1)\cdot 4^{k+1}}$$

$$\lim_{k\mapsto\infty}\left|\frac{(a+1)^{k+1}\cdot k\cdot 4^k}{(k+1)\cdot 4^{k+1}\cdot (a+1)^k}\right|=\lim_{k\mapsto\infty}\left|\frac{(a+1)(a+1)^k\cdot k\cdot 4^k}{(k+1)\cdot 4\cdot 4^k\cdot (a+1)^k}\right|=\lim_{k\mapsto\infty}\left|\frac{(a+1)\cdot k}{(k+1)\cdot 4}\right|$$

$$=\lim_{k\mapsto\infty}\left(\frac{k}{(k+1)}\right)\cdot\left|\frac{a+1}{4}\right|=1\cdot\left|\frac{a+1}{4}\right| \qquad \left|\frac{a+1}{4}\right|<1 \qquad |a+1|<4 \qquad \underline{\underline{-5<a<3}}$$

oder:

$$\lim_{k\mapsto\infty}\sqrt[k]{|a_k|}<1 \qquad a_k=\frac{(a+1)^k}{k\cdot 4^k}$$

$$\lim_{k\mapsto\infty}\left|\sqrt[k]{\frac{(a+1)^k}{k\cdot 4^k}}\right|=\lim_{k\mapsto\infty}\left|\frac{(a+1)}{\sqrt[k]{k}\cdot 4}\right| \qquad NR:\lim_{k\mapsto\infty}\sqrt[k]{k}=\lim_{k\mapsto\infty}k^{\frac{1}{k}}=k^0=1$$

$$=\lim_{k\mapsto\infty}\left|\frac{(a+1)}{1\cdot 4}\right|=\left|\frac{a+1}{4}\right| \qquad \left|\frac{a+1}{4}\right|<1 \qquad |a+1|<4 \qquad \underline{\underline{-5<a<3}}$$

## Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $R=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+...$

**Lösung:**

$$a_n=\frac{1}{n^n} \qquad \lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \textit{konvergent}$$

b) $1+0{,}4+0{,}16+0{,}064+...$

**Lösung:**

$$1+0{,}4+0{,}16+0{,}064+... \mathrel{\hat=} \frac{1}{1}+\frac{4}{10}+\frac{16}{100}+\frac{64}{1000}+... \mathrel{\hat=} \frac{4^0}{10^0}+\frac{4^1}{10^1}+\frac{4^2}{10^2}+\frac{4^3}{10^2}+...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{4}{10}}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

**Lösung:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4\cdot 4^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$$

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+1)}$

**Lösung:**

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \Rightarrow \qquad \textit{konvergent}$$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

**Lösung:**

$$a_n = \frac{n^2}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \qquad \lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{(n+1)^2 \ n!}{(n+1)! \ n^2} \right| = \lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(n+1)\ n^2} \right| = \lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} \right| = \frac{0+0}{1} = 0 < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \textit{konvergent}$$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)\,!}$

**Lösung:**

Konvergenz wenn $\lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

$$\lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{2^{(n+1)} \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot 2^n} \right| = \lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{2 \cdot 2^n \cdot (n+1)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot 2^n} \right| = \lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{2}{(n+2)} \right| = 0 < 1 \ \Rightarrow \qquad \textit{konvergent}$$