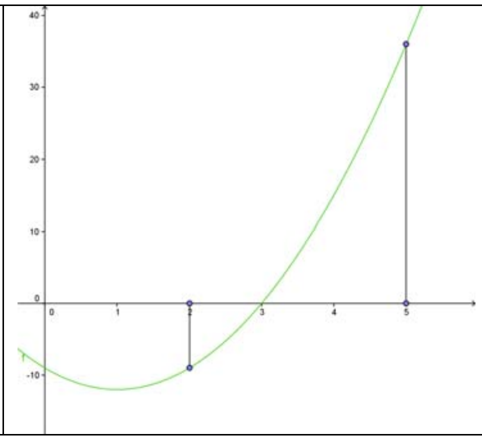
Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im Intervall [2; 5] von $y = 3x^2 - 6x - 9$ und der x-Achse begrenzt wird.

Lösung:

Skizze:



$$Nullstellen: \quad 3x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} \qquad x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

$$Integral \;\; aufteilen: \quad A = |I_1| + |I_2|$$

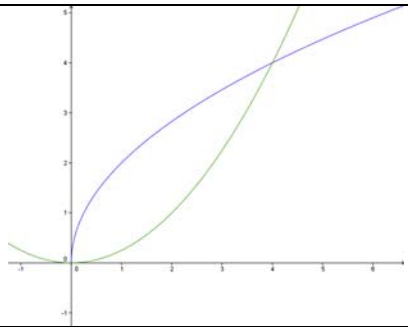
$$I_1 = \int_2^3 \left(3x^2 - 6x - 9\right) dx = x^3 - 3x^2 - 9x \Big|_2^3 = 27 - 27 - 27 - \left(8 - 12 - 18\right) = -27 + 22 = -5$$

$$I_2 = \int_3^5 \left(3x^2 - 6x - 9\right) dx = x^3 - 3x^2 - 9x \Big|_3^5 = 125 - 75 - 45 - \left(27 - 27 - 27\right) = 32 \qquad \underline{\underline{A = 37}}$$

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Kurven $y = 2\sqrt{x}$ und $y = \frac{x^2}{4}$ eingeschlossen wird.

Lösung:

Skizze:



$$Schnittstellen: \qquad \frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \qquad x^2 = 8\sqrt{x} \qquad x^4 = 64x \qquad x^4 - 64x = 0 \quad (x^3 - 64) \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$A = I = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2\sqrt{x}\right) dx = \frac{x^3}{12} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{64}{12} - \frac{32}{3} - (0) = \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = -\frac{16}{3} \qquad \underline{\underline{A = \frac{16}{3}}}$$

Aufgabe 2:

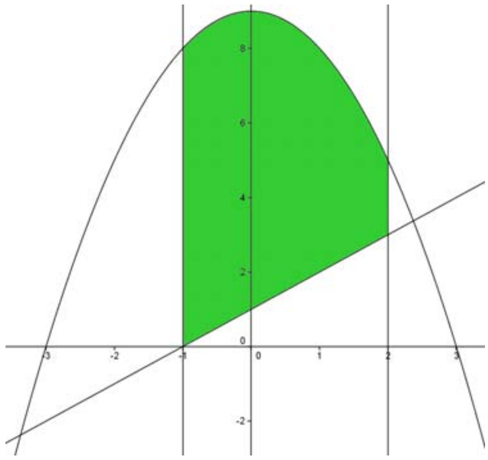
Skizzieren Sie die Flächen, entscheiden Sie, wie die Integration erfolgen soll (dx oder dy) und berechnen Sie die Fläche.

a) $y = x + 1$ $\qquad y = 9 - x^2$ $\qquad x = -1$ $\qquad x = 2$ $\qquad$ (19,5)

Lösung:

$$F = \int_{-1}^{2} \left(9 - x^2 - (x+1)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 - x + 8\right) dx$$

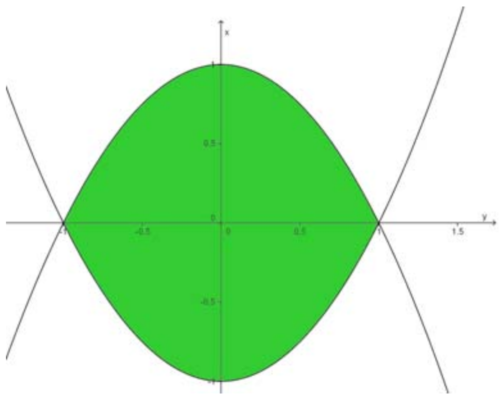
$$= \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 8x \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{-8}{3} - 2 + 16 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 8 = \underline{\underline{19{,}5}}$$



b) $x = 1 - y^2$ $\qquad x = y^2 - 1$ $\qquad$ (8/3)

Lösung:

x-Achse und y-Achse vertauschen



Schnittpunkte berechnen

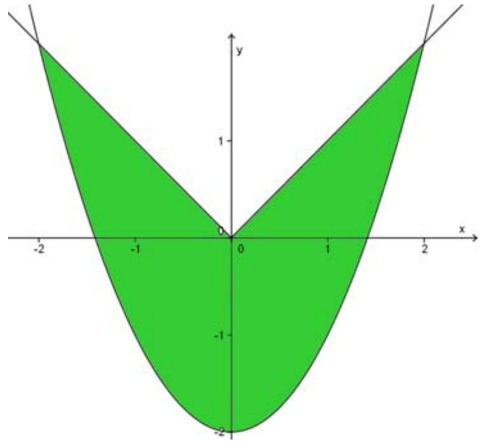
$1 - y^2 = y^2 - 1 \Rightarrow \qquad 2y^2 = 2 \qquad \Rightarrow y^2 = 1$

$y_1 = -1 \qquad y_2 = 1$

$$F = \int_{-1}^{1} \left(y^2 - 1 - \left(1 - y^2\right)\right) dy = \int_{-1}^{1} \left(2y^2 - 2\right) dy$$

$$= \frac{2y^3}{3} - 2y \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - 2 + \frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3} \quad \Rightarrow F = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

c) $y = |x|$ $\quad\quad$ $y = x^2 - 2$ (20/3)



Da symmetrisch, nur positiven Bereich betrachten

Schnittpunkt:

$x = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$

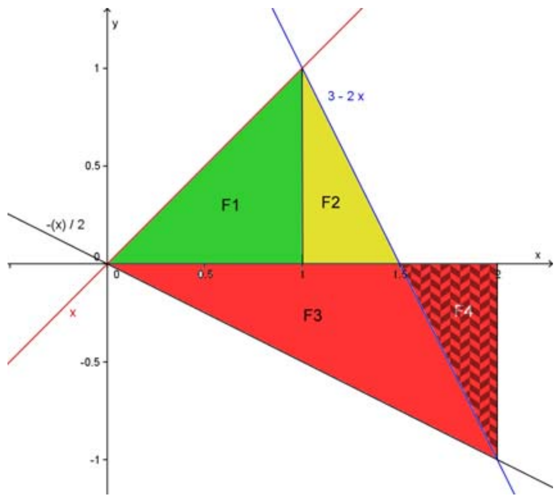
$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = -1 \quad\quad \underline{\underline{x_2 = 2}}$

$$F = 2 \cdot \int_0^2 \left(x^2 - x - 2\right) dx = 2 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right)\Bigg|_0^2 = 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{6}{3} - \frac{12}{3} \right) = 2 \cdot \frac{-10}{3} = \frac{-20}{3} \quad \Rightarrow F = \underline{\underline{\frac{20}{3}}}$$

d) $y = x$ $\quad\quad$ $x + 2y = 0$ $\quad\quad$ $2x + y = 3$ (3/2)



$F = F_1 + F_2 + F_3 - F_4$

$$F_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$F_2 = \int_1^{1,5} (-2x + 3)\,dx = -x^2 + 3x\Big|_1^{1,5} = \frac{1}{4}$$

$$F_3 = \int_0^2 -\frac{1}{2} x\,dx = -\frac{x^2}{4}\Bigg|_0^2 = -1 \hat{=} 1$$

$$F_4 = \int_{1,5}^2 (-2x + 3)\,dx = -x^2 + 3x\Big|_{1,5}^2 = \frac{1}{4}$$

$$F = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie jeweils das Volumen der Körper, die durch Rotation der durch die gegebenen Kurven berandeten Fläche um die angegebene Achse entstehen.

a) $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$; um die x-Achse

Lösung: $$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_0^1 x^4 dx = \left.\frac{\pi x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

b) $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$; um die Achse $x = 1$

Lösung: Entspricht einer Rotation um die um eins verschobene y-Achse.

$y = (x+1)^2 \qquad y = 0 \quad x = 1 \quad um\ y - Achse$

$\sqrt{y} = x + 1 \qquad x = \sqrt{y} - 1$

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 dy = \pi\int_0^1 \left(y - 2\sqrt{y} + 1\right)dy = \pi\left.\left(\frac{y^2}{2} - \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} + y\right)\right|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

c) $y = \sqrt{x}$; $y = x$; um die x-Achse

Lösung:

$y = \sqrt{x}; \quad y = x;$

$$V_1 = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx \qquad V_2 = \pi\int_0^1 x^2 dx \quad V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi\int_0^1 x dx = \left.\frac{\pi x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2} \qquad V_1 = \pi\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{\pi x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{\pi}{3} \qquad V = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Aufgabe 4:

a) Belegen Sie mit Hilfe der Integralrechnung, dass eine Kugel mit dem Radius 3 ein Volumen von 36π hat.

Lösung:

Einen Halbkreis mit dem Radius 3 so in ein Koordinatensystem legen, dass der Mittelpunkt im Ursprung liegt und dann den Halbkreis um die x-Achse rotieren lassen.

$$\text{Kreisfunktion}: \qquad x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 9 - x^2$$

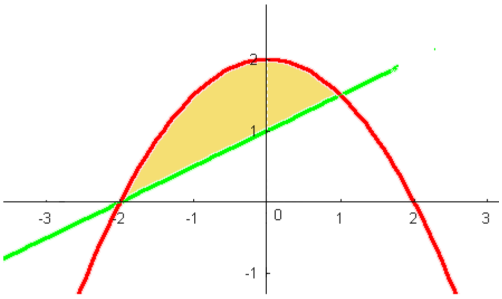
$$V = \pi\int_{-3}^3 \left(9 - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^3 \left(9 - x^2\right)dx = 2\pi\left.\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^3 = 2\pi\left(27 - \frac{27}{3}\right) = \underline{\underline{36\pi}}$$

b) Die durch nachfolgende Gleichungen beschriebenen Kurven schließen eine Fläche ein.

$$y_1 = 2 - \frac{x^2}{2} \qquad\qquad y_2 = \frac{x}{2} + 1.$$

Skizzieren Sie die Funktionen und berechnen Sie die eingeschlossene Fläche F. Berechnen Sie das Volumen, wenn F um die x-Achse rotiert.

Lösung:



Schnittpunkte der Kurven berechnen: $\quad y_1 = y_2$

$$2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} + 1 \qquad \Big|\cdot 2$$

$$4 - x^2 = x + 2 \qquad \Big| + x^2 - 4$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{s1} = -2 \qquad x_{s2} = 1$$

Fläche ermitteln:

$$F = \int_{-2}^{1} (y_2 - y_1)dx = \int_{-2}^{1} \left(\frac{x}{2} + 1 - 2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^{1} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} - x \Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1 - \left(\frac{-8}{6} + \frac{4}{4} + 2 \right) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} - \frac{12}{12} + \frac{16}{12} - \frac{12}{12} - \frac{24}{12} = \frac{-27}{12}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{F = \frac{27}{12}}}$$

Volumen bei Rotation um die x-Achse: $\quad V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \qquad\qquad V = V_1 - V_2$

$$(y_1)^2 = \left(2 - \frac{x^2}{2} \right)^2 = 4 - 2x^2 + \frac{x^4}{4} \qquad\qquad (y_2)^2 = \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^2 = \frac{x^2}{4} + x + 1$$

$$V_1 = \pi \int_{-2}^{1} \left(4 - 2x^2 + \frac{x^4}{4} \right) dx = \pi \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{20}x^5 \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \pi \left(4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{20} - \left(-8 + \frac{16}{3} - \frac{32}{20} \right) \right) = \frac{153}{20}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_{-2}^{1} \left(\frac{x^2}{4} + x + 1 \right) dx = \pi \left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \pi \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{-8}{12} + \frac{4}{2} - 2 \right) \right) = \frac{9}{4}\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{153}{20}\pi - \frac{9}{4}\pi = \underline{\underline{\frac{27}{5}\pi}}$$