Aufgabe 1: Reihen

a) Überprüfen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums ob die Reihe $R=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Lösung:

$$R=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\mapsto\infty}-x^{-1}\Big|_1^t\int_1^t x^{-2}dx=\lim_{t\mapsto\infty}-x^{-1}\Big|_1^t=\lim_{t\mapsto\infty}-\frac{1}{x}\Big|_1^t=\lim_{t\mapsto\infty}\frac{-1}{t}+1=1\Rightarrow \qquad \textit{konvergent}$$

b) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Reihe $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}$

Lösung:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!} \qquad \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

$$a_n=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!} \qquad a_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{x^{n+2}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^{n+1}}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right|=0 \qquad \Rightarrow$$

Konvergenzradius ist $\underline{\underline{R=\infty}}$

c) Berechnen Sie $\int g(x)dx$

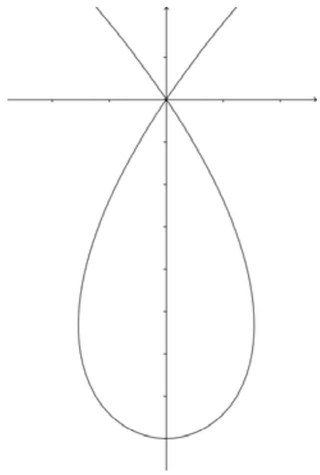
Lösung:

$$\int g(x)=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}=\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}+C}}$$

Aufgabe 2: Parametrisierte Funktionen

Gegeben ist folgende Kurve in parametrischer Form:

$x=t\left(t^2-4\right) \qquad y=4\left(t^2-4\right)$



a) Für welche Werte von t geht die Kurve durch den Ursprung?
b) Bestimmen Sie die Werte von t, in denen die Tangente horizontal ist.
c) Bestimmen Sie die Werte von t, in denen die Tangente vertikal ist.
d) Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche.

Lösung:

a) $x=0 \quad und \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad t_1=-2 \quad t_2=2$

b) $f'(x)=\frac{\dot y}{\dot x}=0 \quad \dot x=3t^2-4 \qquad \dot y=8t \qquad f'(x)=\frac{8t}{3t^2-4}$

horizontal: $8t=0 \qquad \Rightarrow \qquad t=0$

c) $f'(x)=\frac{\dot y}{\dot x}\mapsto\infty \qquad f'(x)=\frac{8t}{3t^2-4}$

vertikal: $3t^2-4=0 \qquad \Rightarrow \qquad t=\pm\sqrt{4/3}$

d) $A=\int_{t_1}^{t_2}y\cdot\dot x\cdot dt \qquad A=\int_{-2}^{2}(4t^2-16)(3t^2-4)dt=68{,}27$

Aufgabe 3: Reihenentwicklung

a) Entwickeln Sie eine MacLaurin-Reihe für $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} \qquad f(0) = 1 = 1!$$

$$f'(x) = -2(1+x)^{-3} \qquad f'(0) = -2 = -2!$$

$$f''(x) = 6(1+x)^{-4} \qquad f''(0) = 6 = 3!$$

$$f'''(x) = -24(1+x)^{-5} \qquad f'''(0) = -24 = -4!$$

$$f^{(4)}(x) = 120(1+x)^{-6} \qquad f^{(4)}(0) = 120 = 5!$$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot (n+1)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$$

b) Gesucht ist die Taylor-Reihe für $f(x) = e^{2x}$ im Entwicklungspunkt $a = 1$

Lösung:

$$f(x) = e^{2x} \qquad f(1) = e^2 \qquad a = 1$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \qquad f'(1) = 2e^2 \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

$$f''(x) = 4e^{2x} \qquad f''(1) = 4e^2 \qquad C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$f'''(x) = 8e^{2x} \qquad f'''(1) = 8e^2$$

$$f^{(4)}(x) = 16e^{2x} \qquad f^{(4)}(1) = 16e^2 \qquad C_n = \frac{2^n e^2}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^2}{n!} (x-1)^n$$

Aufgabe 4: Integrale

Lösen Sie folgende Integrale:

a) $I = \int \dfrac{1}{(2-x)} \cdot \ln(2-x) dx$

Lösung:

$$I = \int \frac{1}{(2-x)} \cdot \ln(2-x) dx \qquad u = \ln(2-x) \qquad u' = -\frac{1}{(2-x)}$$

$$v = -\ln(2-x) \qquad v' = \frac{1}{(2-x)}$$

$$I = -(\ln(2-x))^2 - \int \frac{1}{(2-x)} \cdot \ln(2-x) dx = -(\ln(2-x))^2 - I \qquad \Big| + I$$

$$2I = -(\ln(2-x))^2 \qquad \Rightarrow \qquad I = -\frac{1}{2}(\ln(2-x))^2$$

b) $f(x) = \int_0^4 \left|1 - x^2\right| dx$

Lösung:

$$f(x) = \int_0^4 \left|1 - x^2\right| dx = \int_0^1 -\left(1 - x^2\right) dx + \int_1^4 \left(1 - x^2\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1\right) dx + \int_1^4 \left(1 - x^2\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x \Big|_0^1 + x - \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{-56}{3}$$

Aufgabe 5: Flächen und Volumen

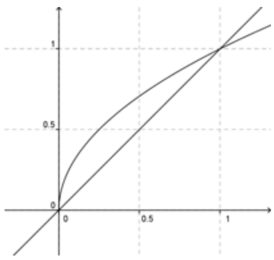
Die Kurven $y = x$ und $y = \sqrt{x}$ schließen eine Fläche ein.
a) Berechnen Sie diese Fläche.
b) Berechnen Sie das Volumen, das entsteht, wenn diese Fläche um die Achse $y = 1$ rotiert.

Lösung:
a) Schnittpunkte berechnen:

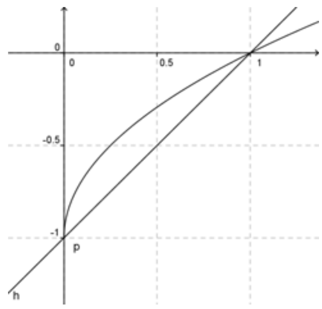
$x = \sqrt{x}$ $\quad x^2 = x$ $\quad x^2 - x = 0$ $\quad x(x-1) = 0$ $\quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

$$F = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

b) Rotation der Fläche zwischen $y = x$ und $y = \sqrt{x}$ um die Achse $y = 1$



entspricht einer Rotation der Fläche zwischen $y = x - 1$ und $y = \sqrt{x} - 1$ um die x-Achse.



$y_1 = x - 1 \qquad y_1{}^2 = x^2 - 2x + 1 \qquad y_2 = \sqrt{x} - 1 \qquad y_2{}^2 = x - 2\sqrt{x} + 1$

$$V_x = \pi \int_0^1 y_1{}^2 dx - \pi \int_0^1 y_2{}^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1 - \left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)\right) dx = \pi \int_0^1 \left(x^2 - 3x + 2\sqrt{x}\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}\pi}}$$