Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, ob die Reihen konvergieren. Bestimmen Sie für c) und d) den Fehler, wenn man die Reihe durch die ersten 5 Folgeglieder annähert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ (k)

Lösung:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ $\quad NR: \quad \int\frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = -\frac{1}{3}x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ ist konvergent, wenn $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4}dx$ konvergent ist, sonst divergent

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4}dx = \lim_{t\mapsto\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)_1^t = \lim_{t\mapsto\infty}-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \textit{konvergent}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ (d)

Lösung:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{3x+1} = \lim_{t\mapsto\infty}\left(\frac{1}{3}\ln(3x+1)\right)_1^t = \lim_{t\mapsto\infty}\frac{1}{3}\ln(3t+1)-\frac{1}{3}\ln(4)=\infty \qquad \Rightarrow \qquad \textit{divergent}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n}$ (k) (SS 2013 / 25 Punkte)

Lösung:

$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n}$ $\quad NR: \int x\cdot e^{-x}dx \qquad u=x \quad u'=1 \quad v=-e^{-x} \qquad v'=e^{-x}$

$$= -xe^{-x}+\int e^{-x}dx = -xe^{-x}-e^{-x} = -e^{-x}(x+1) = \frac{x+1}{-e^{-x}}$$

$$\int_1^{\infty} x\cdot e^{-x}dx = \lim_{t\mapsto\infty}\left(\frac{x+1}{-e^{-x}}\right)_1^t = \lim_{t\mapsto\infty}\left(\frac{t+1}{-e^{-t}}\right)-\frac{2}{-e^1} \overset{DLH}{=} \lim_{t\mapsto\infty}\left(\frac{1}{e^{-t}}\right)+\frac{2}{e}=\frac{2}{e} \qquad \Rightarrow \qquad \textit{konvergent}$$

Fehler:

$$\int_6^{\infty} x\cdot e^{-x}dx \le R_5 \le \int_5^{\infty} x\cdot e^{-x}dx \qquad \frac{7}{e^6}\le R_5 \le \frac{6}{e^5}$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Lösung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad NR: \quad \int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=-x^{-1}=-\frac{1}{x}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist konvergent, wenn $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ konvergent ist, sonst divergent

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\mapsto\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^t=\lim_{t\mapsto\infty}-\frac{1}{t}+1=1 \qquad \Rightarrow \qquad konvergent$$

$$Fehler: R_5=\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \int_6^{\infty}\frac{1}{n^2}dn\le R_5\le\int_5^{\infty}\frac{1}{n^2}dn \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{6}\le R_5\le\frac{1}{5}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Reihe

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$ (2; 4)

Lösung:

$$QK: \quad \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}\cdot n}{(n+1)(x-3)^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{(x-3)(x-3)^n\cdot n}{(n+1)(x-3)^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{(x-3)\cdot n}{(n+1)}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{n}{(n+1)}|x-3|=|x-3|$$

$|x-3|<1$ konvergent für $2<x<4$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$ (-1; 1)

Lösung:

$$QK: \sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{n+1}}{n^2x^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{(n^2+2n+1)x\cdot x^n}{n^2x^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{(n^2+2n+1)x}{n^2}\right|$$

$$\overset{DLH}{=}\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{(2n+2)x}{2n}\right|\overset{DLH}{=}\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2x}{2}\right| \qquad \Rightarrow \qquad |x|<1 \qquad -1<x<1$$

$$WK: \sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\sqrt[n]{n^2x^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\sqrt[n]{n^2}\;x\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|n^{\frac{2}{n}}\;x\right|=|x| \Rightarrow \qquad |x|<1 \qquad -1<x<1$$

$$Ränder: \qquad x=1: \quad \sum_{n=0}^{\infty}n^2 1^n=\sum_{n=0}^{\infty}n^2 \qquad divergent$$

$$x=-1: \quad \sum_{n=0}^{\infty}n^2(-1)^n \qquad divergent \qquad x\in(-1;1)$$

Aufgabe 3:

Gesucht ist die Taylor-Reihe für f(x) =

a) e^{2x} in $x_0 = 1$

Lösung:

$$f(x) = e^{2x} \qquad x_0 = 1$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \qquad f''(x) = 4e^{2x} \qquad f'''(x) = 8e^{2x}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3}{3!} + \ldots$$

$$f(1) = e^2 \qquad f'(1) = 2e^2 \qquad f''(1) = 4e^2 \qquad f'''(1) = 8e^2$$

$$f(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + \frac{4e^2(x-1)^2}{2} + \frac{8e^2(x-1)^3}{6} + \ldots$$

b) cos(x) in $x_0 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Lösung:

$$f(x) = \cos(x) \qquad x_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = -\sin(x) \qquad f''(x) = -\cos(x) \qquad f'''(x) = \sin(x)$$

$$f(x_0) = 0 \qquad f'(x_0) = 1 \qquad f''(x_0) = 0 \qquad f'''(x_0) = -1$$

$$f(x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \ldots$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln(n)}$ (SS 2013 / 15 Punkte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

b) Sei $g(x) = x^2 \cdot f(x)$. Berechnen Sie die Reihendarstellung von $g'(x)$

Lösung:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln(n)}$$

$$QK: \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}\ln(n)}{\ln(n+1)x^{2n}}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^2\ln(n)}{\ln(n+1)}\right| \overset{DLH}{=} \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^2(n+1)}{n}\right| \overset{DLH}{=} |x|$$

$$|x| < 1 \quad \Rightarrow \qquad R = 1$$

$$g(x) = x^2 \cdot f(x) = x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{\ln(n)}$$

$$g'(x) == \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+2}{\ln(n)} x^{2n+1}$$

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie die MacLaurinreihe von $f(x) = x \cdot e^{-x}$ (SS 2008 / 20 Punkte)
b) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Reihe aus a)
c) Bilden Sie das Integral der Reihe

Lösung:

a) $f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}$

b) $QK: \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^{n+2}n!}{(n+1)!\,x^{n+1}}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = \infty$

c) $\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(n+2)\,n!} + C$

Integralkriterium:

$R = \sum_{n=s}^{\infty} a_n$ (monoton fallende Nullfolge!)

$wenn \quad \int_s^{\infty} f(x)dx \quad konvergent, \ dann \ R \ auch \ konvergent, \ sonst \ divergent$

Fehler, (Annäherung durch n Folgeglieder): $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le R_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx$

Bekannte Reihen: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

MacLaurin: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots$

Taylorreihe: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3}{3!} + \ldots$