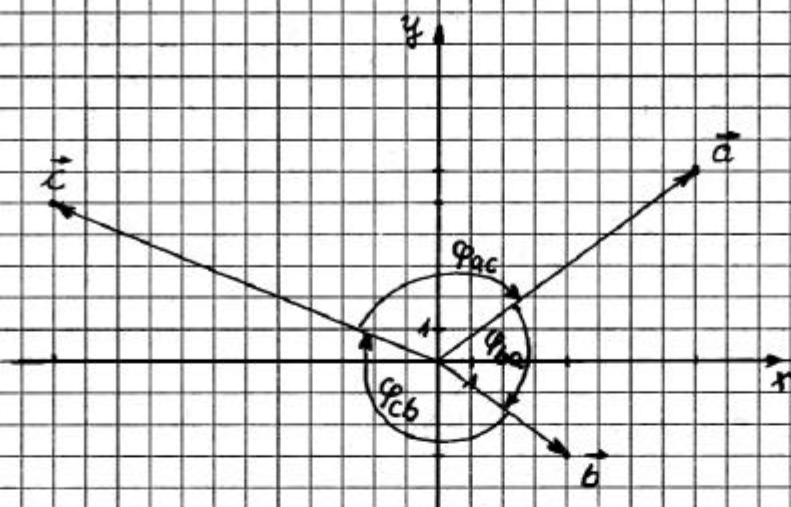


Kreuzprodukt

11.1

a)



$$b) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -24 - 24 = \underline{\underline{-48}}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 36 = \underline{\underline{-16}}$$

$$\vec{c} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} -12 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -72 - 40 = \underline{\underline{-112}}$$

c) $\varphi_{ba} = \varphi_b - \varphi_a = < 0$; $\vec{b}$ ist von $\vec{a}$ aus rechts gedreht

$$\text{Ansatz: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi_{ba} \rightarrow \cos \varphi_{ba} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 14; |\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10; |\vec{b}| = 5$$

$$\cos \varphi_{ba} = \frac{14}{10 \cdot 5} = 0,28; \varphi_{ba} = \underline{\underline{-73,7^\circ}}$$

$$\text{Entsprechend: } \varphi_{cb} = -165,7^\circ \text{ und } \varphi_{ac} = -120,5^\circ$$

$$d) \vec{a} = k \cdot \vec{b} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot 4 \\ k \cdot (-3) \end{pmatrix} \text{ also } \begin{matrix} 8 = k \cdot 4 \\ 6 = -k \cdot 3 \end{matrix} \left. \begin{matrix} \text{keine Lösung} \\ \text{für } k \end{matrix} \right\} \vec{a}, \vec{b} \text{ sind nicht kollinear}$$

$$\vec{b} = k \cdot \vec{c} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot (-12) \\ k \cdot 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} k = -1/3 \\ k = -3/5 \end{matrix} \left. \begin{matrix} \text{keine Lösung für } k, \\ \vec{b}, \vec{c} \text{ sind kollinear} \end{matrix} \right\}$$

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a} \quad \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot 8 \\ k \cdot 6 \end{pmatrix} \text{ keine Lösung für } k, \vec{c}, \vec{a} \text{ sind nicht kollinear}$$

Kreuzprodukt

11.2

$$a) \quad 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad (2 \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -48 - 48 = -96 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Gleichg.} \\ \text{richtig} \end{array} \right\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -48; \quad 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 2 \cdot (-48) = -96$$

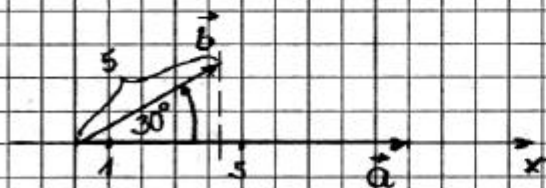
$$b) \quad 2 \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad (2 \cdot \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix} = 40 - 72 = -32 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Gleichung} \\ \text{richtig} \end{array} \right\}$$

$$2 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -24 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} \times (2 \cdot \vec{c}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -24 \\ 10 \end{pmatrix} = 40 - 72 = -32$$

11.3

$$a) \quad \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi_{a,b} = 10 \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 25$$

b)



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = 5 \cdot \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,33 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4,33 \\ 2,5 \end{pmatrix} = 25 \quad \text{wie in a)}$$

Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} \underline{11.4} \quad \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \vec{c} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{11.5} \quad [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 1 - (-4 + 4) = -7$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Linkssystem, da $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] < 0$

$$\begin{aligned} \underline{11.6} \quad \text{Ansatz: } |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\alpha)| \\ \text{Mit } \vec{e}_x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für die Richtung der } +x\text{-Achse folgt} \\ \vec{e}_x \times \vec{a} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, |\vec{e}_x \times \vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{a}| = 3, |\sin \alpha_x| = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \alpha_x &= 0,841 \text{ rad} \\ \vec{e}_x \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, |\vec{e}_x \times \vec{b}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{5}, |\sin \beta_x| = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \beta_x &= 1,107 \text{ rad}, \beta_x' = 2,0344 \text{ rad} \\ \vec{e}_x \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, |\vec{e}_x \times \vec{c}| = \sqrt{5}, |\vec{c}| = 3, |\sin \gamma_x| = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \gamma_x &= 0,841 \text{ rad}, \gamma_x' = 2,381 \text{ rad} \end{aligned}$$

Frage (1) α_x gilt, weil $a_x = +2 > 0$
 β_x' gilt, weil $b_x = -1 < 0$
 γ_x' gilt, weil $c_x = -2 < 0$

Frage (2) Die negativen Lösungen haben für die geometrische Deutung keine weitere Bedeutung, eine Unterscheidung zwischen links/rechts oder oben/unten relativ zur x-Achse ist nicht definiert - in π^3 .