<u>Lineare Gleichungssysteme</u>

Lösungen mit dem Gaußschen Algorithmus:

zu 14.1a)

$$\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{array} \qquad \underline{\text{1. Schritt}} \qquad \begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3{,}5 & 2{,}5 \end{array}$$

2. Zeile + (1/2)*1. Z. →

Es gibt eine eindeutige Lösung. Aus der 2. Zeile → $x_2 = 5/7$
eingesetzt in die 1. Zeile => $x_1 = -4/7$

zu 14.1b)

$$\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \end{array} \qquad \underline{\text{1. Schritt}} \qquad \begin{array}{r} \\ 2.Z + 1.Z \rightarrow \\ 3.Z - 2*1.Z \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -7 \end{array}$$

$$\underline{\text{2. Schritt}} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ 3.Z + 8*2.Z \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{array}$$

Widerspruch in der 3. Zeile, es gibt gar keine Lösung.

zu 14.1c)

$$\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \end{array} \qquad \underline{\text{1. Schritt}} \qquad \begin{array}{r} \\ \text{2. Zeile} + 2*1.\ Z. \rightarrow \\ \text{3. Zeile} + 1.\ Z. \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\underline{\text{2. Schritt}} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \text{3. Zeile} + 2.\ Z. \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rl} -1 & 2 & 1 & (1) \\ 0 & 1 & 2 & (2) \\ 0 & 0 & 0 & (3) \end{array}$$

(3) bedeutet: es gibt keinen Widerspruch, das System ist lösbar.
(2) => $x_2 = 2$. (1) => $x_1 = 2x_2 - 1 = 3$

zu 14.1d)

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -4 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & 10 \end{array} \qquad \text{1. mit 3. Zeile vertauscht:} \qquad \begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 & 10 \end{array}$$

$$\underline{\text{1. Schritt}} \qquad \begin{array}{r} \\ \text{2. Zeile} + 2*1.\ Z. \rightarrow \\ \text{3. Zeile} + 3*1.\ Z. \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & 17 \\ 0 & 10 & -10 & 40 \end{array}$$

$$\underline{\text{2. Schritt}} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \text{3. Zeile} - 2*2.Z. \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rl} -1 & 3 & -2 & 10 & (1) \\ 0 & 5 & -2 & 17 & (2) \\ 0 & 0 & -6 & 6 & (3) \end{array}$$

aus (3) folgt: $x_3 = -1$
damit folgt aus (2): $5x_2 = 2x_3 + 17 = 15$, also: $x_2 = 3$
damit folgt aus (1): $x_1 = 3\, x_2 - 10 - x_2 + 4x_3 = 3$, also $x_1 = 1$.

zu 14.2a)

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>

$$\begin{array}{lrrr|r} & 1 & -2 & 2 & 0 \\ \text{2. Zeile + 1.Z.} \rightarrow & 0 & 1 & -3 & 0 \\ \text{3. Zeile - 1.Z.} \rightarrow & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

<u>2. Schritt</u>

$$\begin{array}{lrrr|rl} & 1 & -2 & 2 & 0 & (1) \\ & 0 & 1 & -3 & 0 & (2) \\ \text{3. Zeile - 2.Z.} \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Das System hat neben der trivialen Lösung noch eine unbestimmte Lösung.
Mit dem Parameter x_3 erhält man:
aus (2): $x_2 = 3\,x_3$, aus (1): $x_1 = 2\,x_2 - 2\,x_3$, $x_1 = 4\,x_3$

zu 14.2b)

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

<u>1. Schritt:</u>

$$\begin{array}{lrrr|r} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \text{2. Zeile - 1. Z.} \rightarrow & 0 & 4 & 2 & 0 \\ \text{3. Zeile - 2*1.Z.} \rightarrow & 0 & 8 & 3 & 0 \end{array}$$

<u>2. Schritt:</u>

$$\begin{array}{lrrr|rl} & 1 & -2 & 1 & 0 & (1) \\ & 0 & 4 & 2 & 0 & (2) \\ \text{3. Zeile - 2*2.Z.} \rightarrow & 0 & 0 & -1 & 0 & (3) \end{array}$$

Die Auswertung der Zeile von (3), (2), (1) in dieser Reihenfolge ergibt:
$x_1 = x_2 = x_3 = 0$
Es gibt also nur die triviale Lösung.

zu 14.2c)

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}$$

<u>1. Schritt:</u>

$$\begin{array}{lrrrr} & 1 & -2 & 1 & 5 \\ \text{2. Zeile + 1. Z.} \rightarrow & 0 & -1 & 3 & 4 \\ \text{3. Zeile - 2*1.Z.} \rightarrow & 0 & 5 & -4 & -9 \\ \text{4. Zeile + 1. Z.} \rightarrow & 0 & -4 & 2 & 6 \end{array}$$

<u>2. Schritt:</u>

$$\begin{array}{lrrrr} & 1 & -2 & 1 & 5 \\ & 0 & -1 & 3 & 4 \\ \text{3. Zeile + 5*2.Z.} \rightarrow & 0 & 0 & 11 & 11 \\ \text{4. Zeile - 4*2.Z.} \rightarrow & 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}$$

<u>3. Schritt:</u>

$$\begin{array}{lrrrrl} & 1 & -2 & 1 & 5 & (1) \\ & 0 & -1 & 3 & 4 & (2) \\ & 0 & 0 & 11 & 11 & (3) \\ \text{11*4. Zeile + 10*3.Z.} \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & (4) \end{array}$$

Zeile (4) ist kein Widerspruch, d.h. das System ist lösbar.
Zeile (3) hat <u>einen</u> Koeffizienten, die 11, der nicht null ist, d.h. es gibt eine eindeutige Lösung.
Aus Zeile (3) folgt: $11\,x_3 = 11$, also $x_3 = 1$.
Aus Zeile (2) folgt: $-x_2 + 3\cdot 1 = 4$, also $x_2 = -1$.
Aus Zeile (1) folgt: $x_1 - 2\cdot(-1) + 1 = 5$, also $x_1 = 2$