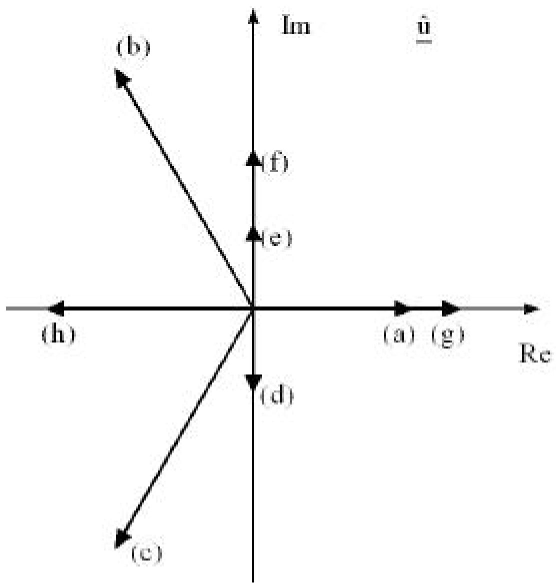
Lösungen zu „Anwenden von komplexen Zahlen in der Elektrotechnik“

16.1) Die folgenden sinusförmigen Spannungsverläufe sollen als komplexe Schwingung angegeben werden auf der Grundlage, daß $\sin(\omega t)$ dem Drehzeiger $e^{j\omega t}$ zugeordnet ist:

a) $u_a(t) = 230V \sin(\omega t)$ — $\underline{u}_a(t) = 230V\ e^{j(\omega t)}$
b) $u_b(t) = 400V \sin(\omega t + 2\pi/3)$ — $\underline{u}_b(t) = 400V\ e^{j(\omega t + 2\pi/3)}$
c) $u_c(t) = 400V \sin(\omega t - 2\pi/3)$ — $\underline{u}_c(t) = 400V\ e^{j(\omega t - 2\pi/3)}$
d) $u_d(t) = 120V \sin(\omega t - \pi/2)$ — $\underline{u}_d(t) = 120V\ e^{j(\omega t - \pi/2)}$
e) $u_e(t) = 120V \sin(\omega t + \pi/2)$ — $\underline{u}_e(t) = 120V\ e^{j(\omega t + \pi/2)}$
f) $u_f(t) = 230V \cos(\omega t)$ — $\underline{u}_f(t) = 230V\ e^{j(\omega t + \pi/2)}$
g) $u_g(t) = 300V \cos(\omega t - \pi/2)$ — $\underline{u}_g(t) = 300V\ e^{j(\omega t)}$
h) $u_h(t) = 300V \cos(\omega t + \pi/2)$ — $\underline{u}_h(t) = 300V\ e^{j(\omega t + \pi)}$

16.2) Geben Sie zu 16.1a - h die komplexe Amplitude an und stellen Sie sie grafisch dar!
Maßstab: 100V $\leftrightarrow$ 1cm

a) $\underline{\hat{u}}_a = 230V\ e^{j(0)}$
b) $\underline{\hat{u}}_b = 400V\ e^{j(2\pi/3)}$
c) $\underline{\hat{u}}_c = 400V\ e^{j(-2\pi/3)}$
d) $\underline{\hat{u}}_d = 120V\ e^{j(-\pi/2)}$
e) $\underline{\hat{u}}_e = 120V\ e^{j(\pi/2)}$
f) $\underline{\hat{u}}_f = 230V\ e^{j(\pi/2)}$
g) $\underline{\hat{u}}_g = 300V\ e^{j(0)}$
h) $\underline{\hat{u}}_h = 300V\ e^{j(\pi)}$

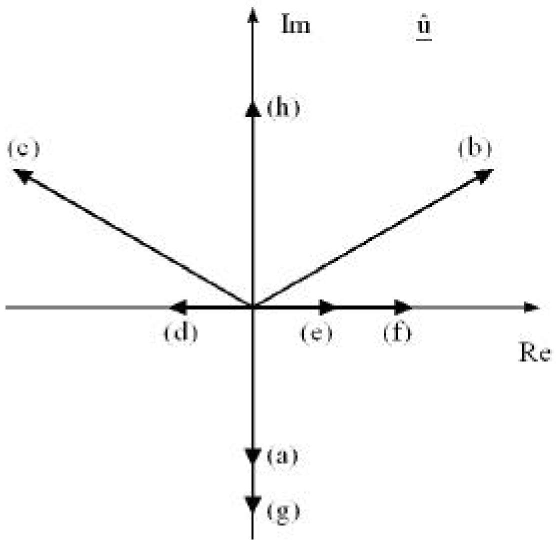


16.3) Die Spannungen aus 16.1 sollen als komplexe Schwingung angegeben werden auf der Grundlage, daß $\cos(\omega t)$ dem Drehzeiger $e^{j\omega t}$ zugeordnet ist.

a) $u_a(t) = 230V \sin(\omega t)$ — $\underline{u}_a(t) = 230V\ e^{j(\omega t - \pi/2)}$
b) $u_b(t) = 400V \sin(\omega t + 2\pi/3)$ — $\underline{u}_b(t) = 400V\ e^{j(\omega t + \pi/6)}$
c) $u_c(t) = 400V \sin(\omega t - 2\pi/3)$ — $\underline{u}_c(t) = 400V\ e^{j(\omega t - 7\pi/6)} = 400V\ e^{j(\omega t + 5\pi/6)}$
d) $u_d(t) = 120V \sin(\omega t - \pi/2)$ — $\underline{u}_d(t) = 120V\ e^{j(\omega t - \pi)}$
e) $u_e(t) = 120V \sin(\omega t + \pi/2)$ — $\underline{u}_e(t) = 120V\ e^{j(\omega t)}$
f) $u_f(t) = 230V \cos(\omega t)$ — $\underline{u}_f(t) = 230V\ e^{j(\omega t)}$
g) $u_g(t) = 300V \cos(\omega t - \pi/2)$ — $\underline{u}_g(t) = 300V\ e^{j(\omega t - \pi/2)}$
h) $u_h(t) = 300V \cos(\omega t + \pi/2)$ — $\underline{u}_h(t) = 300V\ e^{j(\omega t + \pi/2)}$

Geben Sie jeweils zusätzlich die komplexe Amplitude an und stellen Sie sie entsprechend 16.2 grafisch dar!

a) $\underline{\hat{u}}_a = 230V\, e^{j(-\pi/2)}$
b) $\underline{\hat{u}}_b = 400V\, e^{j(\pi/6)}$
c) $\underline{\hat{u}}_c = 400V\, e^{j(5\pi/6)}$
d) $\underline{\hat{u}}_d = 120V\, e^{j(-\pi)}$
e) $\underline{\hat{u}}_e = 120V\, e^{j(0)}$
f) $\underline{\hat{u}}_f = 230V\, e^{j(0)}$
g) $\underline{\hat{u}}_g = 300V\, e^{j(-\pi/2)}$
h) $\underline{\hat{u}}_h = 300V\, e^{j(\pi/2)}$



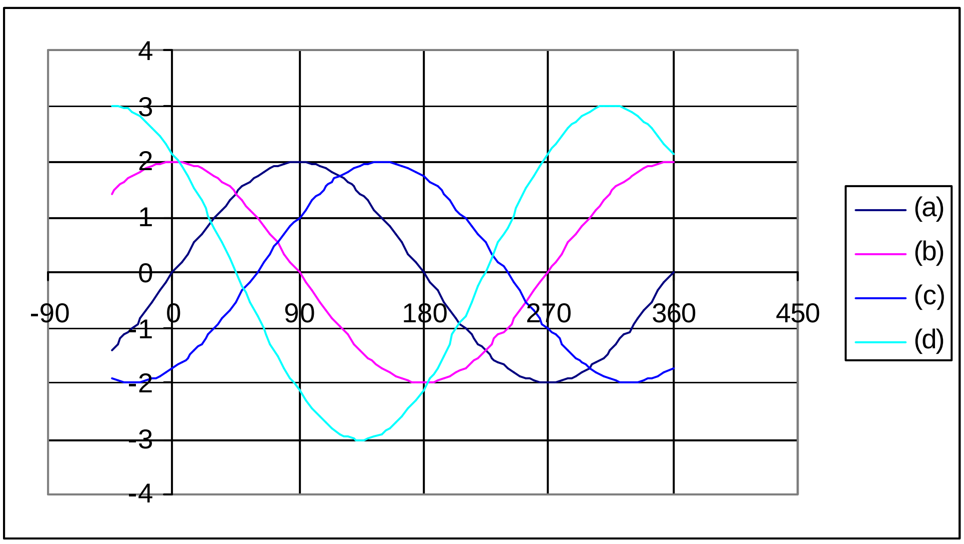
Welcher Unterschied ist gegenüber 16.1 und 16.2 zu erkennen ?

Alle Zeiger sind um - π/2 (rechts herum) gedreht. Die Länge ist unverändert.

16.4) Zu den folgenden komplexen Amplituden sollen sinusförmige Spannungsverläufe angegeben werden auf der Grundlage, daß sin(ωt) dem Drehzeiger $e^{j\omega t}$ zugeordnet ist:

a) $\underline{\hat{u}}_a = 20V\, e^{j0°}$ $u_a(t) = 20V \sin(\omega t)$
b) $\underline{\hat{u}}_b = 20V\, e^{j90°}$ $u_b(t) = 20V \sin(\omega t + 90°)$
c) $\underline{\hat{u}}_c = 20V\, e^{-j60°}$ $u_c(t) = 20V \sin(\omega t - 60°)$
d) $\underline{\hat{u}}_d = 30V\, e^{j135°}$ $u_d(t) = 30V \sin(\omega t + 135°)$

Stellen Sie die Spannungsverläufe mit mindestens einer Periodendauer grafisch dar.
Maßstab: 10V ↔ 1cm, ωT = 2π ↔ 8cm

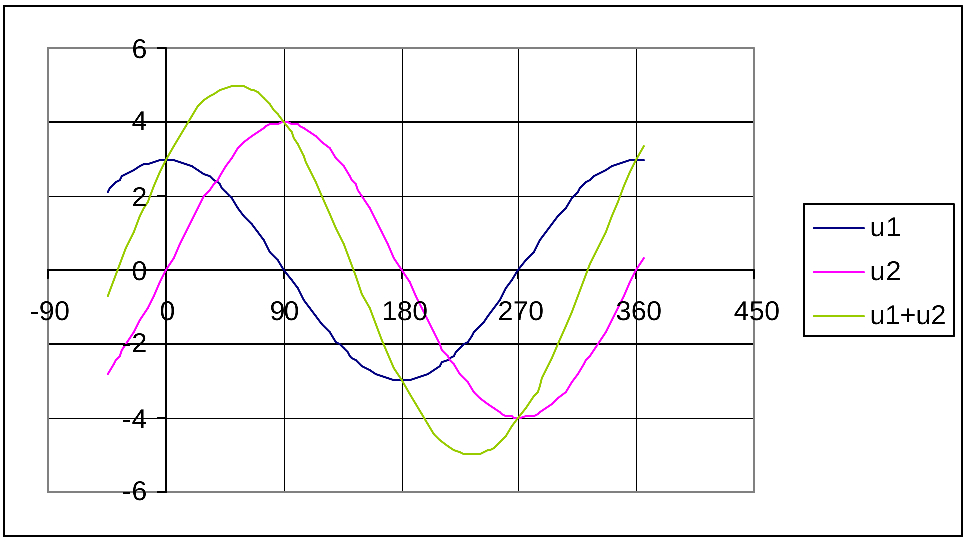


16.5) Gegeben seien die Spannungsverläufe

$$u_1(t) = 3V \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad u_2(t) = 4V \sin(\omega t)$$

Gesucht:

a) grafische Darstellung von $u_1(t)$ und $u_2(t)$ in einem Diagramm

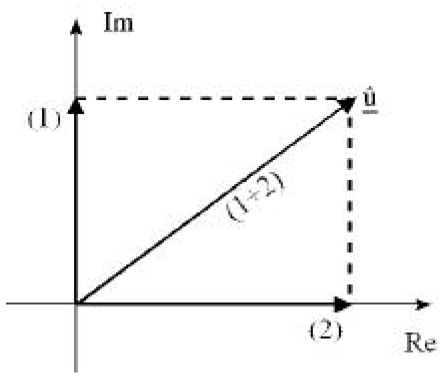


b) die komplexen Schwingungen $\underline{u}_1(t)$ und $\underline{u}_2(t)$

$\underline{u}_1(t) = 3V\, e^{j(\omega t + \pi/2)}$, $\underline{u}_2(t) = 4V\, e^{j(\omega t)}$

c) die komplexen Amplituden
$\underline{\hat{u}}_1$ und $\underline{\hat{u}}_2$ mit grafischer Darstellung
in der Gaußschen Zahlenebene

$\underline{\hat{u}}_1 = 3V\, e^{j(\pi/2)}$, $\underline{\hat{u}}_2 = 4V\, e^{j(0)}$



d) die Summe $\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_1 + \underline{\hat{u}}_2$, rechnerisch und graphisch

graphisch: siehe Bild zu c), Summe (1+2) bzw. $\underline{\hat{u}}$ abgelesen: $\underline{\hat{u}} = 5\, e^{j(37°)}$

Rechnung: $\underline{\hat{u}}_1 = 0V + i \cdot 3V$ $\underline{\hat{u}}_2 = 4V + i \cdot 0V$ $\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_1 + \underline{\hat{u}}_2 = 4V + i \cdot 3V$

umwandeln: $\underline{\hat{u}} = 5{,}0V\, e^{j(36{,}87°)}$

e) Angabe der komplexen Schwingung zu $\underline{\hat{u}}$: $\underline{u}(t) = 5{,}0V\, e^{j(\omega t + 37°)}$

f) reelle Schwingung $u(t)$, Funktionsangabe und grafische Darstellung

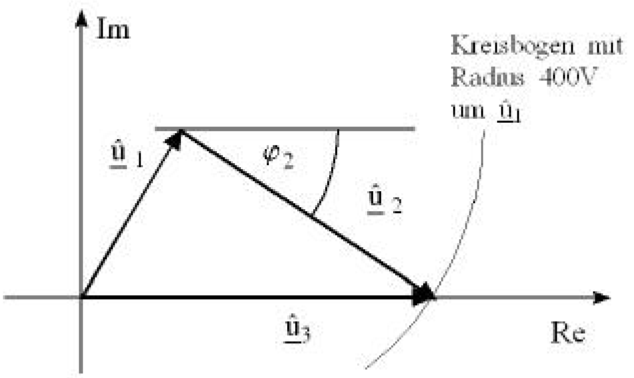
$u(t) = 5{,}0V \sin(\omega t + 37°)$, graphische Darstellung siehe Bild zu a), Kurve $u_1 + u_2$

16.6) Gegeben sei der Spannungsverlauf $u_1(t) = 250V \sin(\omega t + \pi/3)$.

a) Geben Sie $u_1(t)$ durch die komplexe Amplitude $\underline{\hat{u}}_1$ an und stellen Sie $\underline{\hat{u}}_1$ grafisch dar!
Maßstab: 100V ↔ 1cm

$\underline{\hat{u}}_1 = 250V\, e^{j(\pi/3)}$

b) Zu $u_1(\omega t)$ soll eine zweite Spannung $u_2(\omega t) = 400V \sin(\omega t + \varphi_2)$ addiert werden. Die Summe $u_3(\omega t) = u_1(\omega t) + u_2(\omega t)$ soll den Phasenwinkel $\varphi_3 = 0°$ haben. Bestimmen Sie den Phasenwinkel φ_2 der komplexen Amplitude $\underline{\hat{u}}_2$ so, daß diese Vorgabe erfüllt ist. Lösung grafisch!
Abgelesen: $\varphi_2 = -33°$



Als Zusatz: Lösung durch Rechnung

$|\underline{\hat{u}}_2| = 400V$ und $\mathrm{Im}(\underline{\hat{u}}_2) = -\mathrm{Im}(\underline{\hat{u}}_1) = -250V\cdot\sin(\pi/3) = -216{,}5V$

Aus $|\underline{\hat{u}}_2| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\underline{\hat{u}}_2) + \mathrm{Im}^2(\underline{\hat{u}}_2)}$ folgt: $\mathrm{Re}(\underline{\hat{u}}_2) = \sqrt{(400V)^2 - (216{,}5V)^2} = 336{,}3V$

Umwandeln: $\varphi_2 = \arctan(-216{,}5/336{,}3) = -32{,}8°$

c) Wie groß wird die Amplitude $\hat{u}_3$ der Summenspannung? Abgelesen: $\hat{u}_3 = 460V$

Summenspannung durch ihren zeitlichen Verlauf: $u_3(t) = 460V \sin(\omega t)$

d) Stellen Sie $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ einem Diagramm grafisch dar: